

University of Groningen

Twists of genus three curves and their Jacobians

Meagher, Stephen

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

2008

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Meagher, S. (2008). *Twists of genus three curves and their Jacobians*. s.n.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Samenvatting

Stel C is een kromme van geslacht g over een eindig lichaam \mathbf{F}_q . Uit werk van Hasse en van Weil (met een kleine verbetering door Serre) weten we, dat het aantal \mathbf{F}_q rationale punten op C een niet-negatief geheel getal is in het interval

$$[q + 1 - g[2\sqrt{q}], q + 1 + g[2\sqrt{q}]] .$$

Een voor de hand liggende vraag is, welke getallen in dit gegeven interval daadwerkelijk voorkomen als het aantal punten op een kromme van geslacht g over \mathbf{F}_q .

In dit proefschrift behandelen we twee vragen die voortkomen uit een poging, bovenstaand probleem voor geslacht 3 krommen te beantwoorden. Hier volgt een uitleg van deze vragen:

Uit werk van Lauter-Serre en van Auer-Top is bekend, dat een constante c bestaat, onafhankelijk van q , zodat voor elke q er een geslacht 3 kromme C over \mathbf{F}_q is waarvoor ofwel

$$\#C(\mathbf{F}_q) > q + 1 + 3[2\sqrt{q}] - c,$$

ofwel

$$\#C(\mathbf{F}_q) < q + 1 - 3[2\sqrt{q}] + c.$$

De ambiguïteit hier heeft de volgende oorzaak: om bovenstaande bewering aan te tonen, construeren we eerst een constante c zodat voor elke q een indecomposabel hoofdgepolariseerd abels drievoud (A, a) over \mathbf{F}_q bestaat met de eigenschap, dat het Frobenius morfisme π_A voldoet aan de ongelijkheid

$$-\mathrm{tr}(\pi_A) > 3[2\sqrt{q}] - c.$$

De stelling van Torelli levert ons een geslacht 3 kromme C over \mathbf{F}_q waarvan de Jacobiaan $\mathrm{Jac}(C)$ ofwel isomorf is met (A, a) , ofwel met een $[-1]$ twist van (A, a) . Dit heeft tot gevolg dat het Frobenius morfisme π_J van $\mathrm{Jac}(C)$ voldoet aan

$$\pi_J = \pi_A \text{ of } \pi_J = -\pi_A.$$

Bovenstaande bewering van Auer-Top en Lauter-Serre volgt nu uit de spoorformule van Weil

$$\#C(\mathbf{F}_q) = q + 1 - \mathrm{tr}(\pi_J).$$

Serre opperde in een brief aan Top een manier om de gegeven ambiguïteit te behandelen- m.a.w. om te bepalen of $\mathrm{Jac}(C)$ isomorf is met (A, a) of met een $[-1]$ twist van (A, a) . Hij stelde voor, dat met χ_{18} het product van de even algebraïsche theta nulls, opgevat als “algebraïsche modulaire vormen van halftallig gewicht”, $\mathrm{Jac}(C)$ isomorf is met (A, a) over $\mathbf{F}_q(\sqrt{\chi_{18}(A, a)})$. Feitelijk opperde Serre, dat dit het geval zou moeten zijn over ieder lichaam van karakteristiek ongelijk aan 2. Deze suggestie wordt in hoofdstuk 1 van dit proefschrift bewezen. In wat meer hoogdravend taalgebruik kan het hoofdresultaat van dit hoofdstuk als volgt geformuleerd worden: de moduliruimte van krommen van geslacht 3 wordt verkregen uit de moduliruimte van indecomposabele hoofdgepolariseerde abelse drievouden door “de wortel uit χ_{18} toe te voegen”.

De tweede vraag die in dit proefschrift wordt behandeld is de volgende. Zij C een geslacht 3 kromme over \mathbf{F}_q met veel automorfismen. Dan is bekend dat er geslacht 3 krommen C' over \mathbf{F}_q bestaan met de eigenschap dat C' en C niet isomorf zijn over \mathbf{F}_q maar wel over een uitbreiding van \mathbf{F}_q . Een natuurlijke vraag is: kunnen we de mogelijke C' classificeren, en daarbij de getallen $\#C'(\mathbf{F}_q)$ in termen van deze classificatie? Hoofdstuk 2 geeft een antwoord op deze vraag. In het bijzonder worden in detail de speciale gevallen van de Klein en de Fermat krommen van graad 4 behandeld.